

# 基于齿廓测量点的渐开线齿轮基圆圆心反求方法\*

魏建杰, 汤洁, 石照耀

(北京工业大学北京市精密测控技术与仪器工程技术研究中心, 北京 100124)

**[摘要]** 渐开线齿轮是机械装备中的关键零件,在齿轮测量或测绘过程中,基圆圆心需要通过测量点反求得到,其反求精度将直接影响齿轮测量或测绘的精度。在已知基圆半径的条件下,研究了基圆圆心反求方法,建立非线性最小二乘方程,并应用牛顿法进行求解得到基圆圆心坐标。给出了影响反求精度的主要因素:单条渐开线测量点数量、被测渐开线数量及位置分布、基圆圆心初值的选取范围,并设计了上述因素的精度影响分析试验。以模数 3.5、齿数 36 的渐开线圆柱齿轮为例,对所提出的方法进行了试验验证并分析了主要因素对反求精度的影响,得到每条被测渐开线齿廓应选取至少 100 个测量点、在圆周均布方向选取四条渐开线齿廓进行基圆圆心反求效果较佳。研究为渐开线齿轮测量或测绘中的基圆圆心反求提供了依据,具有一定的指导意义和参考价值。

**关键词:** 渐开线;反求方法;基圆圆心;齿廓;测量点

## Reverse Calculation Method of Base Circle Center Based on Involute Profile Measuring Points

WEI Jianjie, TANG Jie, SHI Zhaoyao

(Beijing Engineering Research Center of Precision Measurement Technology and Instruments, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**[ABSTRACT]** Involute gear is a key part of mechanical equipment. In the process of gear measurement or mapping, the base circle center needs to be obtained by inverse calculation of the measuring points, and the precision of inverse calculation will directly affect the accuracy of gear measurement or mapping. In this paper, under the condition of known radius of base circle, the method of establishing the non-linear least squares equation for inverse calculation of the center of base circle was studied and solved by Newton method, and the coordinates of the center of base circle were obtained. The main factors affecting the accuracy of inverse calculation were discussed: the number of measuring points of single involute, the number and position distribution of the measured involute, the selection range of the initial value of the center of base circle. The experimental design of the influence of the above factors on the accuracy was carried out. Taking the involute cylindrical gears with modulus 3.5 and tooth number 36 as an example, the method proposed in this paper was verified and the influence of main factors on the accuracy of reverse calculation was quantitatively analyzed. It is found that at least 100 measuring points should be selected for each measured involute profile, and four involute profiles should be selected in the circumferential uniform distribution direction for the reverse calculation of the base circle center. The research in this paper has certain guiding significance and reference value for the inversion of the base circle center in the measurement and mapping of involute gears.

**Keywords:** Involute; Reverse calculation; Base circle center; Profile; Measuring point

**DOI:**10.16080/j.issn1671-833x.2019.20.070

齿轮作为关键零部件,广泛应用于航空航天、风电设备、汽车制造等领域。齿轮质量直接影响装备的效

率、噪声、运动精度和使用寿命<sup>[1-2]</sup>。由渐开线的性质可知,渐开线齿廓的形状仅与基圆圆心位置和基圆半径大小有关。齿轮测量过程中,确定齿轮基圆圆心的位置是齿轮测量的关键<sup>[3-5]</sup>。

\* 基金项目:国家重点研发计划子课题(2017YFF0204804)。

对于基圆圆心反求及其测量点的研究,国内外学者做了大量工作。Xu等<sup>[6]</sup>在旋转成型系统上对齿轮全齿廓进行扫描测量,分析全齿廓测量点得到基圆圆心。陈丽萍等<sup>[7]</sup>采用三次多项式表示渐开线齿廓,通过齿廓测量点拟合基圆圆心。汤杰等<sup>[8]</sup>在未知基圆圆心和基圆半径的情况下,通过齿廓测量点建立最小二乘方程,应用高斯牛顿法求解得到基圆圆心和基圆半径。Han等<sup>[9]</sup>通过极坐标系下的齿廓测量点与基圆半径的几何关系建立非线性方程,应用牛顿迭代法反求基圆半径。Wang等<sup>[10]</sup>根据基圆圆心与测量点的位置变化关系建立方程,求解得到基圆圆心。Gao等<sup>[11]</sup>针对使用坐标测量机(CMM)检验齿轮的齿面测量点,推导了二维齿轮齿面渐开线曲线和三维齿面最小测点的表示公式,用于确定齿轮齿廓测量的最佳测量尺寸和测量点位置。Barbato等<sup>[12]</sup>针对圆柱直齿轮测量中,获取一组齿轮齿廓测量点,建立与理论测量点的误差函数,通过非线性最小二乘插值法确定齿轮定位参数并进行修正。Su等<sup>[13]</sup>利用由齿廓测量点和Aitken加速收敛算法构造的混合迭代方程,求解被测齿轮参数。

尽管国内外学者提出了众多齿轮测量中基圆圆心反求的反求方法,但并未就基圆圆心反求中影响反求精度的各项因素进行研究。本文根据齿廓测量点与基圆圆心的几何关系建立非线性最小二乘方程,应用牛顿法进行求解得到基圆圆心坐标;重点研究参与基圆圆心反求的测量点对反求结果的影响,在齿轮测量中心上进行试验验证并给出应用该方法时测量点选取的建议。

### 1 渐开线齿轮基圆圆心反求方法

应用齿轮测量中心对齿轮进行测量时,测头在齿高中部进行测量,齿轮齿序编号按顺时针标识<sup>[14]</sup>,机器坐标系为O-XYZ,齿轮几何中心为O',在机器坐标系下对齿轮进行测量。在二维坐标系下反求基圆圆心坐标,齿轮基圆圆心在机器坐标系下的坐标为O'(e<sub>x</sub>, e<sub>y</sub>),单条渐开线反求基圆圆心如图1所示。

根据渐开线原理,对于单条渐开线齿廓上任意两个齿廓测量点P<sub>0</sub>(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>)和P<sub>i</sub>(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>),若在同一条渐开线上,则P<sub>0</sub>(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>)和P<sub>i</sub>(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)所在渐开线起始角相同,即:

$$\theta_0 = \theta_i \quad (1)$$

设基圆圆心坐标为O'(e<sub>x</sub>, e<sub>y</sub>),令:

$$\Delta_i = \theta_i - \theta_0 \quad (2)$$

根据齿廓测量点集建立最小二乘方程:

$$F(e_x, e_y) = \min \sum_{i=1}^n (\Delta_i)^2 \quad (3)$$

式中,由渐开线原理可知:

$$\begin{cases} \theta_0 = \arctan \frac{y_0 - e_y}{x_0 - e_x} - (\xi_0 - \alpha_0) \\ \theta_i = \arctan \frac{y_i - e_y}{x_i - e_x} - (\xi_i - \alpha_i) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \xi_0 = \frac{\sqrt{(x_0 - e_x)^2 + (y_0 - e_y)^2} - r_b}{r_b} \\ \xi_i = \frac{\sqrt{(x_i - e_x)^2 + (y_i - e_y)^2} - r_b}{r_b} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = \arccos \frac{r_b}{\sqrt{(x_0 - e_x)^2 + (y_0 - e_y)^2}} \\ \alpha_i = \arccos \frac{r_b}{\sqrt{(x_i - e_x)^2 + (y_i - e_y)^2}} \end{cases} \quad (6)$$

式中,θ<sub>0</sub>和θ<sub>i</sub>分别为点P<sub>0</sub>(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>)和P<sub>i</sub>(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)所在渐开线的起始角;ξ<sub>0</sub>和ξ<sub>i</sub>分别为点P<sub>0</sub>(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>)和P<sub>i</sub>(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)所对应的展开角;α<sub>0</sub>和α<sub>i</sub>分别为点P<sub>0</sub>(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>)和P<sub>i</sub>(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)所对应的压力角;O'(e<sub>x</sub>, e<sub>y</sub>)为基圆圆心坐标;r<sub>b</sub>为基圆半径;n为测量点数量,i=1,2, …, n。

考虑到单条渐开线反求基圆圆心时,对圆心的约束只来自这一条渐开线,为增加对基圆圆心反求的约束,可选择多条渐开线齿廓反求基圆圆心,如图2所示。

对于多条渐开线齿廓点集{P<sub>ij</sub>(x<sub>ij</sub>, y<sub>ij</sub>)}反求基圆圆心的最小二乘方程为:

$$F(e_x, e_y) = \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\Delta_{ij})^2 \quad (7)$$

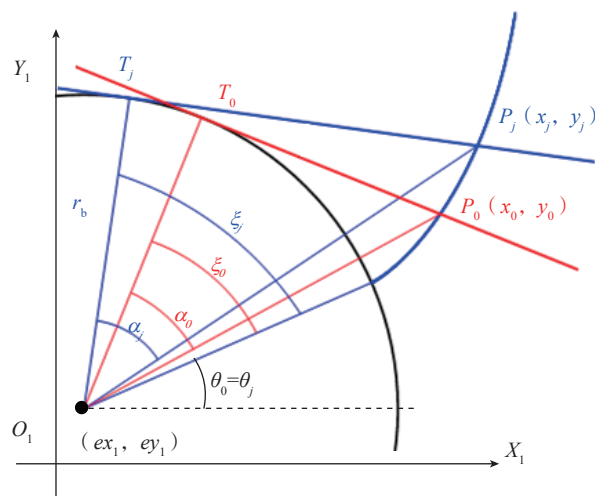


图1 单条渐开线反求基圆圆心

Fig.1 Reverse calculation of the base circle center by single involute

$$\Delta_{ij} = \theta_{ij} - \theta_{i0} \quad (8)$$

式中,  $\Delta_{ij}$  为齿廓测量点  $P_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$  所在渐开线的起始角与  $P_{i0}(x_{i0}, y_{i0})$  所在渐开线起始角的差值;  $m$  为渐开线数量,  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $n$  为每条渐开线的齿廓测量点数量,  $j=1, 2, \dots, n$ 。

应用牛顿法求解式(3)和式(7)得到齿轮基圆圆

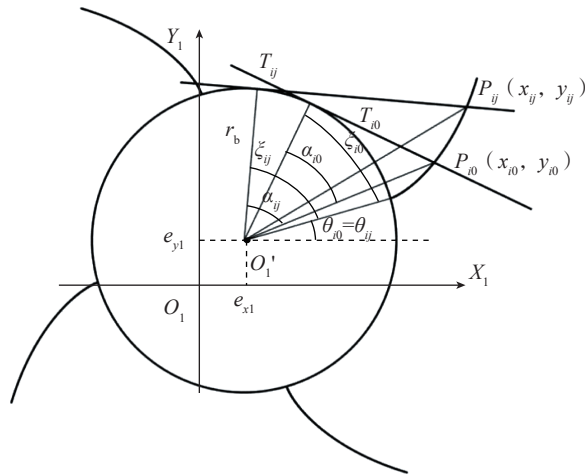


图2 多条渐开线反求基圆圆心  
Fig.2 Reverse calculation of the base circle center by multiple involutes

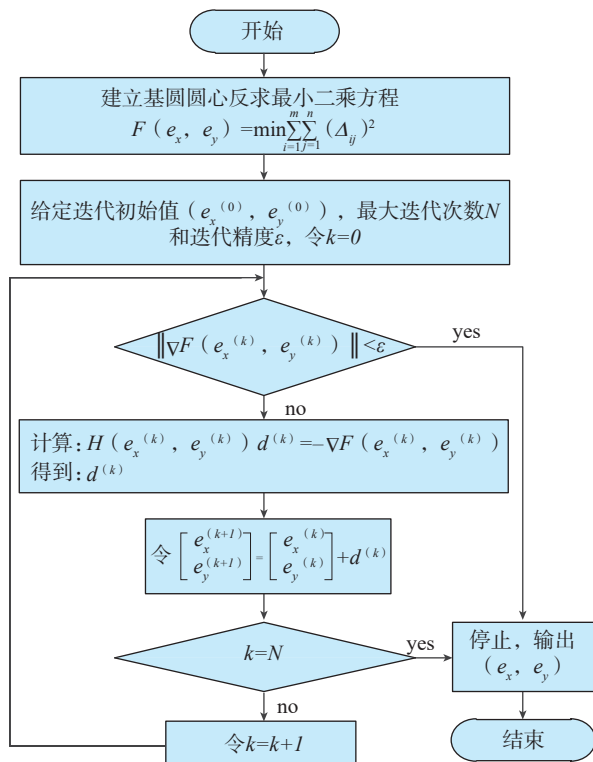


图3 牛顿法流程  
Fig.3 Process of Newton's method

心坐标  $O'(e_x, e_y)$ , 其流程如图3所示。

## 2 反求精度主要影响因素分析的试验设计

基于齿廓测量点的基圆圆心反求中, 对反求结果的主要影响因素包括: 单条渐开线反求点的数量、多条渐开线的数量及其在圆周分布的位置、基圆圆心初值的选取。对上述影响因素进行分析, 可以为实际渐开线齿轮的测量方案设计提供指导。

### 2.1 单条渐开线反求点数量影响分析试验设计

基于齿廓测量点进行基圆圆心反求时, 利用全齿廓所有测量点进行基圆圆心反求, 虽然可以提高计算精度, 但增大了反求计算量, 严重降低计算效率。因此, 研究参与反求的测量点数量对反求精度的影响, 并确定可以保证反求精度的测量点最少数量对于提高计算速度有很高的指导意义。

单条渐开线反求点数量的研究, 是要在基圆圆心反求中采用不同的测量点数量来参与反求, 分析反求点数量对反求结果的影响。在展成法测量、等间距采样条件下, 被测齿轮某一齿廓上的测量点选取依据为: 在取值范围内按一定间隔均匀选取测量点参与基圆圆心反求, 取值范围内的齿廓测量点如图4所示。

例如, 在某一齿廓上选取第 10, 20, 30, ..., 200 个测量点进行基圆圆心反求, 分析反求点数量对反求结果的影响。

### 2.2 多条渐开线数量及位置分布影响分析试验设计

利用单条渐开线齿廓测量点进行基圆圆心反求仍

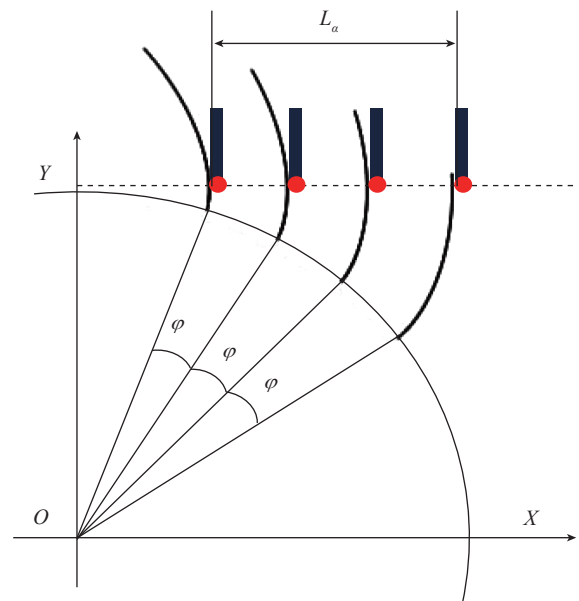


图4 取值范围内的齿廓测量点  
Fig.4 Measurement points on profile in evaluation range

会有较大误差,选择不同位置的齿廓进行反求得到的反求结果之间差异较大。因此,有必要考虑基于多条渐开线齿廓上的测量点进行反求,而这些渐开线齿廓的位置分布及选取的齿廓数量对于反求精度亦会产生影响,对其进行分析可提高反求结果精度。

多条渐开线数量及位置的研究,是要分析多条渐开线数量及位置不同时,对基圆圆心反求结果的影响。多条渐开线数量及位置选取方案,拟按沿圆周分布的连续3条、连续4条、沿圆周均布的3条渐开线和沿圆周均布的4条渐开线进行基圆圆心反求。以36齿为例,多条渐开线选取如图5所示。

多条渐开线数量及位置研究中的渐开线选取方案包括:连续3条渐开线 $Z_1$ 、 $Z_2$ 、 $Z_3$ ;连续4条渐开线 $Z_1$ 、 $Z_2$ 、 $Z_3$ 、 $Z_4$ ;沿圆周均布的3条渐开线 $Z_1$ 、 $Z_{13}$ 、 $Z_{25}$ ;沿圆周均布的4条渐开线 $Z_1$ 、 $Z_{10}$ 、 $Z_{19}$ 、 $Z_{28}$ 。

### 2.3 基圆圆心初值选取影响分析试验设计

本文基圆圆心反求中,应用牛顿法求解最小二乘方程时,需要给定基圆圆心初值坐标。由于测量过程中基圆圆心坐标未知,基圆圆心初值通常选取原点坐标。考虑到当坐标原点与齿轮基圆圆心距离过大时,会引起牛顿法失效,不能得到基圆圆心坐标数值。为此,需要研究基圆圆心初值的选取对反求结果的影响,从而给出本文基圆圆心反求方法中适用的初值选取范围。

## 3 基圆圆心反求试验数据分析

### 3.1 试验条件

利用齿轮测量中心,采取展成法原理随渐开线齿轮

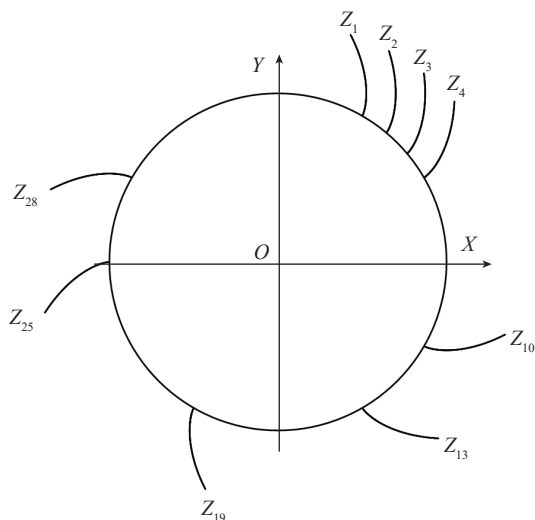


图5 多条渐开线选取  
Fig.5 Selection of the multiple involutes

齿廓进行测量,测量过程中测头在齿高中部平面内测量齿面,测头Y方向固定在基圆半径位置,X方向随被测齿轮的回转在基圆切线方向运动。被测齿轮为渐开线圆柱直齿轮,其基本参数如表1所示,被测齿轮实物如图6所示。

根据被测齿轮基本参数,确定计值范围起点展开长度为15.0060mm,计值范围 $L_\alpha$ 为14.5206mm,采样间隔约为0.0279mm,每条齿廓测量点数量约为625个,计值范围内的测量点数量约为520个。本文试验中对被测齿轮全齿廓36个齿的左右齿面进行了测量。部分实测数据如表2所示,实测部分齿廓如图7所示。

表1 被测齿轮参数

Table 1 Parameters of measured workpiece

模数 / mm	齿数	齿宽 / mm	变位系数	通孔直径 / mm	压力角 / (°)	螺旋角 $\beta$ / (°)
3.5	36	25	0	40	20	0



图6 被测齿轮实物

Fig.6 Measured workpiece

表2  $Z_1$ 齿部分测量数据

Table 2 Measurement points of  $Z_1$  part

序号	X/mm	Y/mm	Z/mm
1	14.6518	59.2142	169.6628
2	14.6517	59.2182	169.6687
3	14.6516	59.2241	169.6758
...	...	...	...
623	13.4161	65.5559	169.6658
624	13.4142	65.5725	169.6635
625	13.4323	65.5953	169.6621

### 3.2 单条渐开线测量点数量对反求精度的影响

单条渐开线反求点数量试验中,分别对齿序为  $Z_1$ 、 $Z_2$ 、 $Z_3$  的反求点数量研究,在计值范围内均匀选取 10, 20, 30, ..., 200 个测量点进行基圆圆心反求,得到反求结果见表 3。

取被测齿轮齿顶圆为参考圆,对齿轮测量中心测量得到的被测齿轮齿顶圆测量数据进行最小二乘圆拟合,拟合得到的圆心坐标作为被测齿轮基圆圆心  $O'$  (图 1) 的参考数值。试验得到基圆圆心  $O'$  的参考数值为 (19.26, 21.46), 单条渐开线基圆圆心反求结果如图 8 所示,分别选择单条渐开线齿廓进行基圆圆心反求,其结果相互之间差异较大,分布较为发散。

以表 3 中反求得到的基圆圆心结果与参考坐标数值之间的距离作为反求误差值 ( $\mu\text{m}$ ), 得到不同反求点数量反求误差如图 9 所示。

通过观察图 9 可以得出,对于单条渐开线齿廓,反求点数量不同其反求结果不同。图 9 中三条齿廓的反求结果,随着反求点数量的增加,反求结果由波动较大变为渐渐趋于稳定。当反求点数量达到 100 个左右时反求结果趋于稳定。当继续增大反求点数量时,以  $Z_1$  反求为例,反求点数量为 190 个时反求误差为  $23.95\mu\text{m}$ ,反求点数为 100 个时,反求误差为  $23.42\mu\text{m}$ ,反求误差的最大变化量为  $0.53\mu\text{m}$ 。

通过单条渐开线反求点数量试验可知,每条齿廓上参与反求点数量达到 100 个左右时反求结果趋于稳定;建议采用多条渐开线共同参与基圆圆心反求。

### 3.3 被测渐开线数量及位置分布对反求精度的影响

选取多条渐开线齿廓参与基圆圆心反求。针对本文选用的被测齿轮的试验数据,选取每条齿廓反求点数量为 100 个,分别选取单条渐开线 ( $Z_1$ )、连续 3 条渐开线

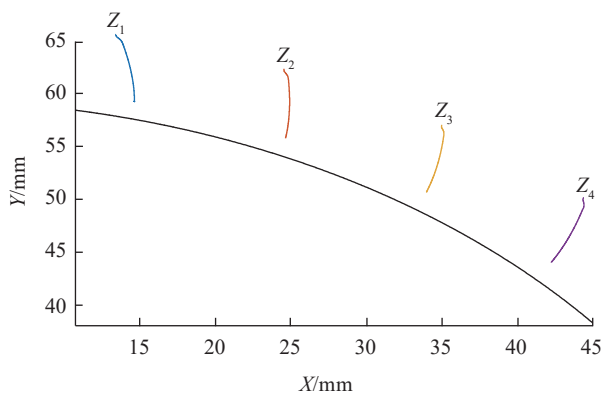


图7 实测齿廓  
Fig.7 Measured profiles

表3 不同反求点数量的基圆圆心反求结果

Table 3 Reverse calculation results of the base circle center with different measurement points

反求点数量	$Z_1$ 反求结果 ( $e_x, e_y$ )/ $\mu\text{m}$	$Z_2$ 反求结果 ( $e_x, e_y$ )/ $\mu\text{m}$	$Z_3$ 反求结果 ( $e_x, e_y$ )/ $\mu\text{m}$
10	(46.47, 16.34)	(42.71, -0.27)	(23.42, -4.65)
20	(40.42, 15.87)	(62.77, 2.15)	(5.28, -6.20)
30	(38.52, 15.51)	(57.93, 1.63)	(10.33, -5.63)
40	(36.84, 15.35)	(57.67, 1.64)	(4.76, -6.17)
50	(39.07, 15.54)	(59.35, 1.74)	(6.37, -6.04)
60	(39.51, 15.55)	(60.93, 1.93)	(4.70, -6.16)
70	(41.78, 15.77)	(62.35, 2.05)	(5.67, -6.06)
80	(40.63, 15.64)	(61.66, 1.99)	(4.78, -6.15)
90	(40.96, 15.68)	(62.07, 2.02)	(5.05, -6.12)
100	(41.99, 15.77)	(62.82, 2.09)	(5.23, -6.11)
110	(42.06, 15.78)	(62.92, 2.10)	(5.03, -6.12)
120	(41.65, 15.74)	(62.32, 2.04)	(4.92, -6.14)
130	(42.21, 15.79)	(62.88, 2.09)	(5.11, -6.12)
140	(42.25, 15.79)	(63.10, 2.11)	(5.02, -6.12)
150	(42.43, 15.81)	(62.84, 2.08)	(5.29, -6.10)
160	(41.94, 15.76)	(62.66, 2.07)	(4.87, -6.14)
170	(42.47, 15.80)	(62.70, 2.06)	(5.37, -6.09)
180	(41.87, 15.75)	(62.62, 2.06)	(5.05, -6.12)
190	(42.54, 15.81)	(63.19, 2.12)	(5.01, -6.12)
200	(42.47, 15.80)	(63.20, 2.12)	(5.04, -6.12)

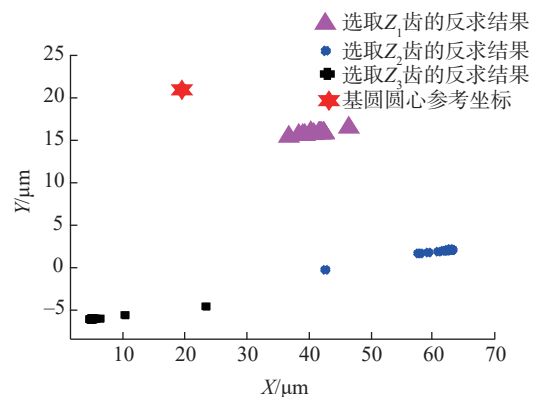


图8 单条渐开线基圆圆心反求结果  
Fig.8 Reverse calculation results of the base circle center by single involute

( $Z_1, Z_2, Z_3$ )、连续4条渐开线( $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ )、沿圆周均布3条渐开线( $Z_1, Z_{13}, Z_{25}$ )和沿圆周均布4条渐开线( $Z_1, Z_{10}, Z_{19}, Z_{28}$ )的齿廓测量点进行基圆圆心反求试验。选取的齿序如图5所示。以反求得到的结果与参考坐标之间的距离作为反求误差值( $\Delta/\mu\text{m}$ )，不同渐开线选取方案的反求结果如表4所示，反求误差的数值如图10所示。

由表4可以看出，采用单条、连续3条或者连续4条渐开线齿廓进行基圆圆心反求时，反求误差值较大；而采用沿圆周均布的3条或者4条渐开线齿廓进行基圆圆心反求时，反求误差值较小，反求误差分别为 $1.73\mu\text{m}$ 、 $0.99\mu\text{m}$ 。沿圆周均布的四条渐开线齿廓反求得到的基圆圆心更接近参考坐标。

### 3.4 基圆圆心初值选取对反求精度的影响

根据以上试验，已确定选取沿圆周均布4条渐开线齿廓来反求基圆圆心。为考察基圆圆心初值对反求结果的影响，进一步开展基圆圆心初值试验。试验中，

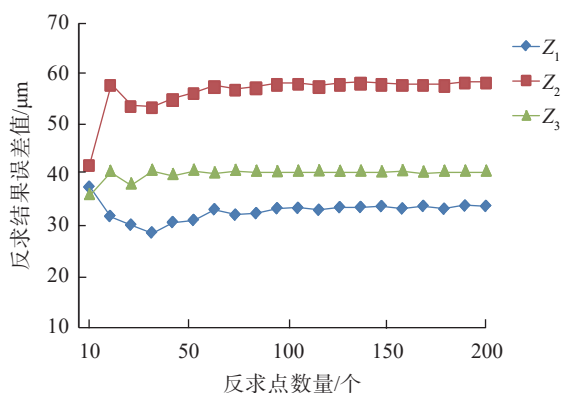


图9 不同反求点数量反求误差

Fig.9 Reverse calculation errors of different measurement points used

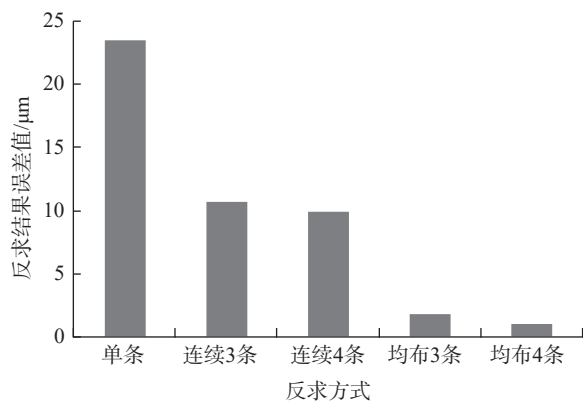


图10 不同渐开线选取方案的反求误差

Fig.10 Reverse calculation errors of different involutes selected

表4 不同渐开线选取方案的反求结果

Table 4 Reverse calculation results with different involutes selected

反求方式	反求结果( $e_x, e_y$ )/ $\mu\text{m}$	$\Delta/\mu\text{m}$
单条渐开线	(41.99, 15.77)	23.43
连续3条渐开线	(12.79, 13.06)	10.60
连续4条渐开线	(15.19, 12.39)	9.90
均布3条渐开线	(20.67, 22.46)	1.73
均布4条渐开线	(19.67, 20.56)	0.99
参考坐标	(19.26, 21.46)	—

表5 选取不同初值的反求结果

Table 5 Reverse calculation results with different initial value of the base circle center

初值选取/mm	与参考坐标的距离/ $\mu\text{m}$	反求结果
(0, 0)	29	(19.67, 20.56)
(0.1, 0.1)	113	(19.67, 20.56)
(0.2, 0.2)	254	(19.67, 20.56)
...	...	...
(1.556, 1.556)	2172	(19.67, 20.56)
(1.557, 1.557)	2173	F

选取的沿圆周均布四条渐开线齿廓的齿序为 $Z_1, Z_{10}, Z_{19}, Z_{28}$ ；每条齿廓选取100个测量点；基圆圆心初值逐渐增大(按间隔0.1)，从(0, 0)、(0.1, 0.1)、(0.2, 0.2)……直至基圆圆心反求算法失效，不能得到基圆圆心坐标(表5中用F来表示)。在反求算法失效的初值附近进一步细分(按间隔0.001)，得到反求结果如表5所示。

由表5可知，当反求初值选取在(1.556mm, 1.556mm)以内时，不论初值如何选取，基圆圆心反求结果在取小数点后两位精度时数值均相同，表明在此初值范围内，本文的基圆圆心反求结果不因初值选取而改变；当初值选择为(1.557mm, 1.557mm)时，基圆圆心反求算法失效，不能得到基圆圆心坐标。此时初值与参考坐标之间的距离为 $2173\mu\text{m}$ 。

## 4 结论

在渐开线齿轮进行测量或测绘时,通常需要对其基圆圆心的位置进行反求。在已知基圆半径、未知基圆圆心的情况下,基于渐开线齿廓测量点的基圆圆心反求中,主要影响因素有:单条渐开线测量点数量、被测渐开线数量及位置分布、基圆圆心初值的选取。在齿轮测量中心上,对模数 3.5、齿数 36 的被测圆柱渐开线齿轮进行了测量试验。得到结论如下:

(1) 单条渐开线测量点数量对反求精度的影响试验中,对单条渐开线的 625 个测量点,在计值范围内均匀选取其中的 10, 20, 30, ..., 200 个测量点进行基圆圆心反求试验,分析得到每条渐开线齿廓应选取至少 100 个测量点。

(2) 基圆圆心初值选取影响分析试验中,分别选取单条、连续 3 条、连续 4 条、沿圆周均布 3 条和沿圆周均布 4 条渐开线的齿廓测量点进行基圆圆心反求试验,观察反求结果得出沿圆周均布的四条渐开线齿廓进行基圆圆心反求的结果更接近参考坐标,其相对于参考坐标的反求误差为 0.99 $\mu\text{m}$ 。

(3) 基圆圆心初值选取影响分析试验中,选取初值与参考坐标的距离应在一定范围内(针对本文试件,其基圆圆心的初值与参考坐标之间距离为 2173 $\mu\text{m}$ ),否则会引起反求算法失效。

基于渐开线齿廓测量点进行基圆圆心反求时,为得到较佳的反求结果,建议选取沿圆周均布 4 条渐开线齿廓参与反求、每条齿廓选取至少 100 个测量点、选取初值与参考坐标的距离应在一定范围内。本文针对渐开线齿廓反求基圆圆心中的测量点开展的研究,在渐开线齿轮测量或测绘时,为确定其基圆圆心位置的反求条件提供了依据。

## 参考文献

[1] 石照耀, 费业泰, 谢华镔. 齿轮测量技术 100 年——回顾与展望[J]. 中国工程科学, 2003, 5(9): 13-17.  
SHI Zhaoyao, FEI Yetai, XIE Huakun. 100 years of gear measurement technology—review & prospect[J]. China Journal of Engineering Science, 2003, 5(9): 13-17.

[2] GOCH G. Gear metrology[J]. CIRP Annals-manufacturing Technology, 2003, 52(2): 659-695.

[3] ISO 1328-1 Cylindrical gears—ISO system of flank tolerance classification—Part 1: Definitions and allowable values of deviations relevant to flanks of gear teeth[S]. ISO, 2013.

[4] GB/T 10095.1—2008. 圆柱齿轮精度制——第 1 部分: 轮齿

同侧齿面偏差的定义和允许值[S]. 2008.

GB/T 10095.1—2008. Cylindrical gears—system of accuracy—Part 1: Definitions and allowable values of deviations relevant to corresponding flanks of gear teeth[S]. 2008.

[5] ISO 1328-1 Cylindrical gears—ISO system of flank tolerance—Part 1: Definitions and allowable values of deviations relevant to flanks of gear teeth[S]. ISO, 1995.

[6] XU B, SO I, YUKI S, GAO W. Pitch deviation measurement of an involute spur gear by a rotary profiling system[J]. Precision engineering, 2015; 39: 152-160.

[7] 陈丽萍, 帅梅, 杨川, 等. 一种反求渐开线齿轮(或花键)参数的实用方法[J]. 机械科学与技术, 2001, 20(3): 353-358.

CHEN Liping, SHUAI Mei, YANG Chuan, et al. A practical method for reversed involute gear (or spline) parameters[J]. Mechanical Science and Technology, 2001, 20(3): 353-358.

[8] 汤洁, 石照耀. 渐开线参数的反求及应用[J]. 北京工业大学学报, 2009, 35(1): 8-12.

TANG Jie, SHI Zhaoyao. Reverse calculation of the parameters of involutes and application[J]. Journal of Beijing University of Technology, 2009, 35(1): 8-12.

[9] HAN L F, TANG W Y, WANG J, et al. Measurement of involute profile with small clamping eccentricity in a gear measuring center[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 59(4): 269-278.

[10] WANG LD, LING SY, MA Y, et al. Effects of comprehensive eccentricity of involute cam on gear profile deviations[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 24(3): 392-398.

[11] GAO C H, CHENG K, WEBB D. Investigation on sampling size optimisation in gear tooth surface measurement using a CMM[J]. International Journal Advantance Manufacturing Technology, 2004, 24: 599-606.

[12] BARBATO G, CHIABERT P, ANTONIO G D, et al. Method for automatic alignment recovery of a spur gear[J]. International Journal of Production Research, 2016, 54(15): 4475-4486.

[13] SU C Z, SHAO F C, LIU J, et al. Measuring geometrical parameters of non-standard involute spur gears for humanoid massage robot with reverse solution[C]//IEEE Conference on Robotics and Biomimetics. Zhuhai, 2015.

[14] ISO 21771 Gears-Cylindrical involute gears and gear pairs-Concepts and geometry[S]. ISO, 2007.

通讯作者: 汤洁, 博士, 副教授, 主要研究方向为精密测试技术及仪器, E-mail: tangjie@bjut.edu.cn.

(责编 大漠)